

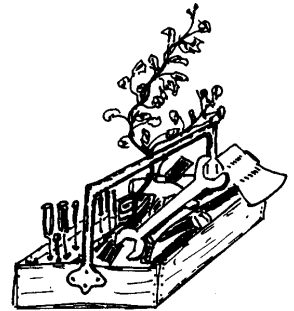
Unterrichtsprjekte Natur und Technik



Vinnhorster Weg 2
30419 Hannover

Telefon: 0511-168-47665/7
Fax: 0511-168-47352
E-mail: 40.50@hannover-stadt.de

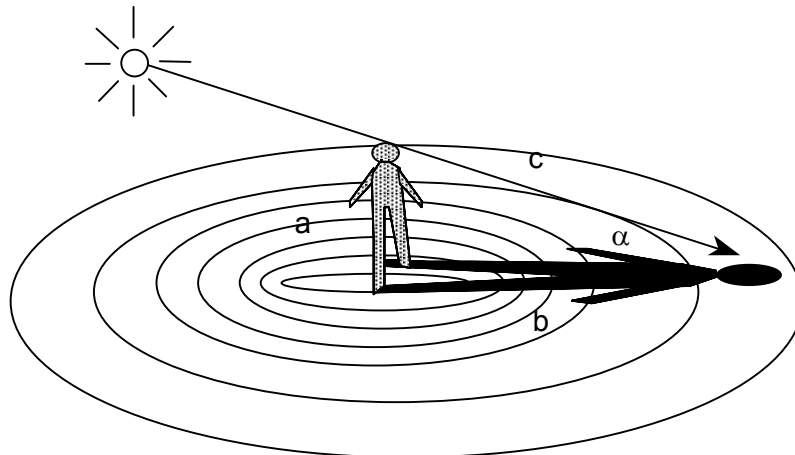
Internet:
www.schulbiologiezentrum-hannover.de



19.44

**Zum Selbstbau
für fachübergreifenden Unterricht,
Arbeitsgemeinschaften, Projektwochen**

Die „Sonnenenergie-Uhr“: Abschätzen der solaren Strahlungsleistung mit Hilfe der Geometrie



Was kann die Sonne zu einer bestimmten Tages- und Jahreszeit bei uns maximal leisten?
Die Antwort ist wesentlich für Berechnungen zum Wirkungsgrad der Photosynthese, bei Erhebungen zu Energieflüssen in Ökosystemen aber auch bei der Abschätzung der Effizienz von solaren Energieanlagen.

Ein theoretischer Wert kann, wenn das Datum, die Deklination der Sonne und die genaue Ortszeit bekannt sind, mit dem Taschenrechner oder einem relativ einfachen

Computerprogramm (z.B. BASIC) berechnet werden. Natürlich gibt es auch Messgeräte, auch solche, die mit verhältnismäßig wenig Aufwand selbst gebaut werden können. Wir wählen hier einen Ansatz, der von der beobachtbaren Sonne, also vom Phänomen ausgeht und die potentielle Strahlungsleistung aus messbaren Längen- und Flächenverhältnissen herleitet. Dazu genügt ein Maßband, Papier, ein Stift und ein wenig Geometrie. Die Schattenlänge eines vertikalen Zeigers kann, einer Art „Uhr“ gleich, Auskunft über das aktuelle Strahlungsangebot der Sonne geben. Damit lässt sich anschaulich zeigen, welche Leistung gerade "vom Himmel fällt". Eine solche „Sonnenenergie-Uhr“ lässt sich leicht bauen. Handwerkliches Geschick ist nachrangig, im Prinzip kann die „Uhr“ aus konzentrischen, auf den Schulhof gemalten Kreisen bestehen, in deren Mittelpunkt Sie selbst stehen. Grundkenntnisse in Geometrie und Geographie sind dabei hilfreich, können aber auch im Zuge der Beschäftigung mit dem Thema erworben werden.

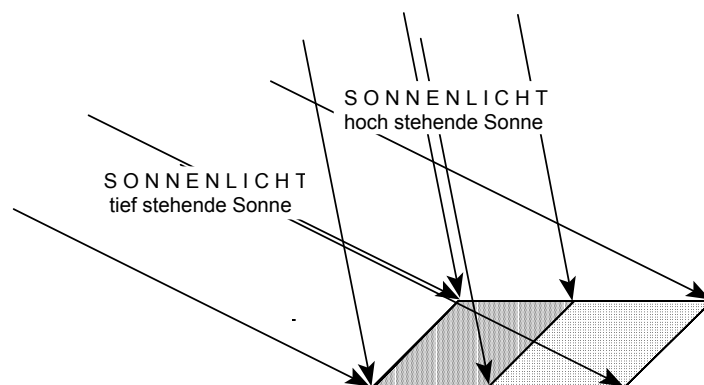
Das im Sonnen-Energie-Garten im Schulbiologiezentrum Hannover aufgebaute Gerät besteht aus einer 1 m² großen, horizontal gelagerten Platte, in deren Mitte sich ein 10 cm langer, vertikaler Schattenstab erhebt. Anhand von konzentrischen, auf die Platte gemalten Kreisen lässt sich die solare Strahlungsleistung im Watt pro Quadratmeter ablesen. Die Größe der Platte ist kein Zufall: Die Strahlungsleistung bezieht sich immer auf eine Fläche, und diese ist nach internationaler Physiker-Übereinkunft der Quadratmeter. Dieser Quadratmeter ist zugleich das Messgerät.

Unser Projektvorschlag umfasst neben den Grundlagen und der Bauanleitung für die „Sonnenenergie-Uhr“ auch einen Vorschlag, wie die Begriffe „Joule, Watt, Kilowatt“ körperlich erfahrbar werden können.

Das Projekt hat astronomisch-geographische, mathematische und handwerkliche Aspekte und bietet sich daher besonders für fachübergreifende Unterrichtsformen an.

Das solare Strahlungs- bzw. Energieangebot

Das potentielle Energieangebot der Sonne steigt und fällt mit ihrer scheinbaren, täglichen ost-westlichen Wanderung über den Horizont und folgt im Prinzip – von Wolken und anderen Hindernissen abgesehen – ihrer Höhe und ihrer Verweildauer über dem Horizont. Dies ist nicht nur tages- sondern auch jahreszeitenabhängig. Bei uns beschreibt die Sonne am 21.12. einen kurzen, flachen Bogen am Himmel, am 21.6 ist ihr Tagbogen lang und hoch. Entsprechend unterschiedlich ist die Größe der Fläche, die von einer bestimmten Anzahl von „Sonnenstrahlen“ beleuchtet werden.



Zum Winterbeginn am 21.12. erreicht die Sonne, die dann mittags senkrecht über dem südlichen Wendekreis (23,5° südliche Breite) steht, in Hannover (52,4° nördliche Breite) nur $90^\circ - 52,4^\circ - 23,5^\circ = 14,1^\circ$ Höhe. Am 21. März, wenn die Mittagssonne senkrecht über dem Äquator (0°) steht, sind es $90^\circ - 52,4^\circ - 0^\circ = 37,6^\circ$. Bei Sommerbeginn am 21.6. steht sie mittags senkrecht über dem nördlichen Wendekreis (23,5° nördliche Breite) und kommt bei

uns auf $90^\circ - 52,4^\circ + 23,5^\circ = 61,5^\circ$ Höhe. Am 23. September haben wir die gleichen Verhältnisse wie im März (nur mit sinkender Tendenz): $90^\circ - 52,4^\circ - 0^\circ = 37,6^\circ$.

Gleichzeitig verändern sich auch die Auf- und Untergangsorte der Sonne: Im Winter geht sie im Südosten auf und im Südwesten unter, im Sommer im Nordosten bzw. Nordwesten. Nur zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen (21.3. bzw. 23.9.) geht sie im Osten auf und im Westen unter. Als Folge ist der (Sonnen)Tag im Sommer 16 Stunden, im Winter nur 8 Stunden lang. Entsprechend unterschiedlich ist das Strahlungs- und Energieangebot, das der Natur, dem Menschen und der Technik zur Verfügung steht.

Die Begriffe „Energie“ und „Leistung“ bedürfen, weil sie oft irrtümlich gleich gesetzt oder falsch benutzt werden einer kurzen Klärung: Energie kann Arbeit im physikalischen Sinne verrichten. Um ein Auto z.B. auf 100 km/h zu bringen wird eine bestimmte Menge Energie (Benzin) benötigt. Der Energiebetrag wird in Joule (J) angegeben. Der Begriff „Leistung“ bringt zusätzlich die Zeit ein, in der diese Energie umgesetzt wird. Wenn das Auto in 10 Sekunden auf 100 km/h gebracht werden soll, wird dem Motor größere Leistung abgefordert als wenn mit nur sanftem Gasfuß beschleunigt wird. Die Leistung wird in Watt (W) angegeben und ist der Quotient aus Energie und Zeit (J/s)

Unsere „Strahlungs-Uhr“ gibt Aufschluss über die theoretisch höchstmögliche Strahlungsleistung der Sonne, bezogen auf einen Quadratmeter, also in W/m^2 . Wenn dieser Wert mit dem Faktor Zeit (Sekunden) multipliziert wird, erhalten wir die solare Energie in Joule pro m^2 . Schließlich lässt sich ermitteln, wie viele Wattstunden (Wh) Sonnenenergie pro Stunde, Tag, Woche oder Monat auf einen Quadratmeter fallen können. Eine Wattstunde = 1 Joule x 3600 s (1 kWh = 3600000 J = 3,6 MJ).

Strahlungsleistung und Horizontwinkel der Sonne

Die maximale Strahlungsleistung P_{\max} der Sonne auf eine horizontale Fläche folgt dem Sinus ihres Horizontwinkels α nach der Beziehung

$$P_{\max} = 1000W/m^2 \times \sin \alpha$$

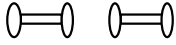
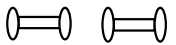
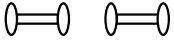
Der Sinus von 90° , also bei senkrechtem Einfall ist 1, P_{\max} erreicht mit $1000 W/m^2$ den höchste Wert. Ist der Horizontwinkel beim Auf- oder Untergang 0° , dann geht P_{\max} durch $\sin 0^\circ = 0^\circ$ auf $0 W/m^2$ zurück. Der Wert $1000 W$ ist lediglich ein abgerundeter Schätzwert und die Formel basiert nur auf den geometrischen Verhältnissen der Einstrahlung.

Genau ermittelt ist die „Solarkonstante“ von $1352 W/m^2$ bei senkrechter Einstrahlung an der Obergrenze der Atmosphäre. Selbst bei senkrechtem Einfall ist die Strahlungsleistung an der Erdoberfläche um etwa 25% reduziert (= ca. $1000 W/m^2$). Zusätzlich erfährt die Strahlung eine mit geringerem Horizontwinkel steigende Schwächung (Extinktion) z.B. durch Streuung und Absorption, die in die Formel nicht eingeht. Je tiefer die Sonne steht, desto länger ist der Weg, den ihre Strahlung durch die Erdatmosphäre hinter sich bringt. Auch die Trübung bzw. Transparenz der Lufthülle ist nicht berücksichtigt. Die Brechung des Lichtes (Refraktion) schließlich führt dazu, dass die Sonne bei sinkendem Horizontwinkel höher als tatsächlich zu stehen scheint. Alle diese Faktoren lassen sich in eine – wesentlich kompliziertere – Formel kleiden. Das ist u. E. hier nicht nötig, denn:

Der theoretisch ermittelte Wert kann mit einem Solarwattmeter überprüft werden. In der Praxis hat sich gezeigt, die rechnerischen Ergebnisse mit den Messwerten recht gut übereinstimmen und dass die geometrische Methode den schulischen Ansprüchen durchaus genügen kann.

Den Leistungsbegriff veranschaulichen

Die Kreise der „Strahlungs-Uhr“ werden in 100 W/m^2 -Schritten auf die Platte gemalt. Das Ablesen der Strahlungsleistung bleibt ohne die Vorstellung davon, was gemessen wird, inhaltsleer. Mit zwei 5 kg Hanteln, einem Maßband und einer Stoppuhr kann jeder (z.B. in unserem Sonnen-Energie-Garten) körperlich erfahren, was mit der Leistungsangabe 100 Watt gemeint ist:

 Zwei 5 kg Hanteln zu halten erfordert etwa 100 N (Newton) Kraft	 Um zwei 5 kg Hanteln einen Meter hochzuheben muß etwa 100 J (Joule) Energie umgesetzt werden $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$	 Um zwei 5 kg Hanteln einen Meter in einer Sekunde hochzuheben muß etwa 100 W (Watt) Energie umgesetzt werden $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ Nm/s}$
---	--	---

Wenn z.B. eine Strahlungsleistung von 700 W/m^2 abgelesen wird heißt das, dass 7 Menschen im Sekundentakt je 10 kg einen Meter hoch stemmen müssten, um auf die gleiche Leistung zu kommen.

Den Horizontwinkel α der Sonne messen

Zunächst wird die Sonnenhöhe über dem Horizont gemessen. Den Horizontwinkel α messen wir z.B. mit einem einfachen Sextanten (Bauanleitung in Arbeitshilfe 19.14). Er ergibt sich auch aus den Längen eines senkrechten Schattenwerfers und dessen Schatten (s.u.). Der zum Winkel α gehörige Sinuswert lässt sich mit jedem etwas besseren Taschenrechner per Knopfdruck erfragen oder der folgenden Tabelle entnehmen. Da der Sinus eines Winkels gleich dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse ist, bietet sich auch eine zeichnerische Lösung an.

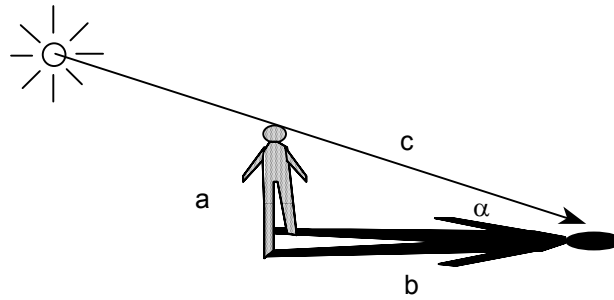
Beispiel:

Gemessener Winkel $\alpha = 45^\circ$, $\sin 45^\circ = 0,707 \rightarrow 1000 \text{ W/m}^2 \times 0,707 =$
 $P_{\max} = \sin \alpha \times 1000 \text{ W/m}^2 \times 0,707 \text{ W/m}^2$

Maximale Werte der Strahlung pro qm (ohne Berücksichtigung der Extinktion und Refraktion)

α	$\sin \alpha$	W/m^2	α	$\sin \alpha$	W/m^2
90°	1,000	1000	45°	0,707	707
85°	0,996	996	40°	0,643	643
80°	0,985	985	35°	0,574	574
75°	0,966	966	30°	0,500	500
70°	0,940	940	25°	0,423	423
65°	0,906	906	20°	0,342	342
60°	0,866	866	15°	0,259	259
55°	0,819	819	10°	0,174	174
50°	0,766	766	05°	0,087	087

Schattenlänge als "Zeiger" für die solare Strahlungsleistung

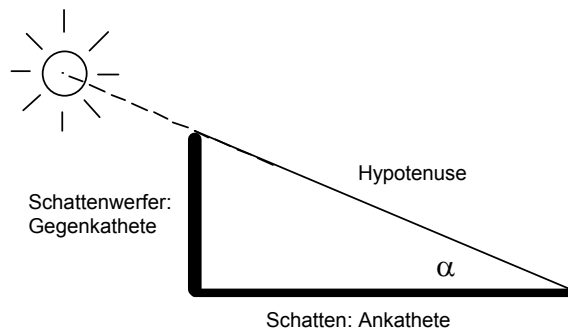


Wenn kein Winkelmesser zur Verfügung steht, kann die Schattenlänge eines aufrecht stehenden Beobachters (oder eines senkrechten Stabes) Aufschluss über die Strahlungsleistung geben.

Wenn a die Körpergröße und b die Schattenlänge ist gilt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Die Formel ergibt sich aus der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ im rechtwinkligen Dreieck (Pythagoras). Der Sinus des Winkels α ist das Verhältnis zwischen Gegenkathete a und Hypotenuse c. Die Hypotenuse c ist gleich der Wurzel aus $(a^2 + b^2)$



Beispiel:

Körpergröße $a = 1,75$ m, Schattenlänge $b = 3,5$ m

$$\sin \alpha = \frac{1,75}{\sqrt{1,75^2 + 3,5^2}} = 0,447$$

Die Strahlungsleistung ist $P_{\max} = 1000 \times \sin \alpha = 447 \text{ W/m}^2$

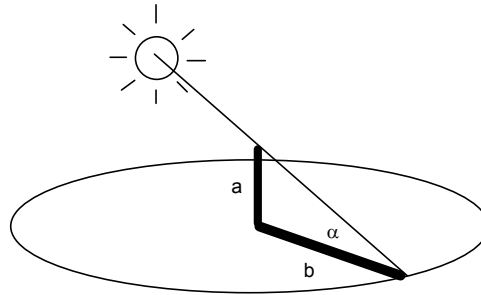
Schattenlänge eines vertikalen Stabes in Abhängigkeit von der Sonnenhöhe

Die „Strahlungs-Uhr“ benutzt die Länge des Schattens, den ein vertikaler Stab auf die horizontale Fläche wirft. Sie kann aber auch die Winkelhöhe α der Sonne über dem Horizont messen. Die Schattenlänge und der Horizontwinkel α stehen in folgendem Zusammenhang:

$$a : b = \tan \alpha$$

a = Höhe des Schattenwerfers, b = Schattenlänge

(Der Tangens des Winkels α ist der Quotient aus Gegenkathete a und Ankathete b).



Um die den Abstand der entsprechenden Messkreise zum Zentrum, d.h. zum Fußpunkt des Stabes zu erhalten, muss b isoliert und auf die linke Seite der Gleichung gebracht werden.

$$b = a / \tan \alpha$$

Beispiel:

Gesucht wird die Länge des Schattens, den ein 1,75 m großer, aufrecht stehender Beobachter auf eine horizontale Fläche wirft, wenn die Sonne 60° über dem Horizont steht

$$b = 1,75 \text{ m} / \tan 60^\circ = 1,75 \text{ m} / 1,732 = 1,01 \text{ m}$$

Damit lässt sich bei gegebener Höhe des Schattenwerfers für jeden Horizontwinkel a ein Radius für einen Messkreis finden. Berührt das Schattenende des Beobachters die 1,01 m-Marke, beträgt die Winkelhöhe der Sonne im gegebenen Beispiel 60° .

In der folgenden Tabelle finden Sie die Radien für $0 < \alpha < 90^\circ$. Die Höhe des Stabes ist 10 cm

Schattenlängen b eines vertikalen Stabes von a = 10 cm Höhe bei einem Winkel α der Sonne über dem Horizont:

$$b = 10 \text{ cm} / \tan \alpha$$

α	$\tan \alpha = a/b$	b (cm)	α	$\tan \alpha = a/b$	B (cm)
90°	∞	0	45°	1,00	10,00
85°	11,43	0,87	40°	0,84	11,92
80°	5,67	1,76	35°	0,70	14,28
75°	3,73	2,68	30°	0,58	17,32
70°	2,75	3,64	25°	0,47	21,45
65°	2,14	4,66	20°	0,36	27,47
60°	1,73	5,77	15°	0,27	37,32
55°	1,43	7,00	10°	0,18	56,71
50°	1,19	8,40	05°	0,09	114,30

Festlegen der Messkreise für den Horizontwinkel

Ziehen Sie Kreise mit den o.g. Radien um den mittig auf die Platte gesetzten Stab. Eine bequeme Lösung ist der Fadenzirkel: Eine Unterlegscheibe, auf den Stab geschoben und an die ein Faden geknotet wurde, dient als Drehlager. Die Scheibe sollte leichtgängig sein und nicht verkanten. In einer zweiten Unterlegscheibe wird ein Stift oder ein Körner geführt. Eine Variante wäre, die Messhilfe für die Winkelhöhe

als auf der Platte drehbaren und in 5°-Schritten gradierten Stab anzulegen. Er wird zum Messen einfach unter den Schatten geführt.

Messkreise für die Strahlungsleistung

Nachdem die mit bestimmten „glatten“ Horizontwinkeln korrespondierenden Schattenlängen bekannt und als Messkreise auf die Platte gezeichnet wurden, ist jetzt zu ermitteln, wie lang die Schatten für „glatte“ Strahlungsleistungswerte sind. Praktisch sind Werte im 100 W/m²-Abstand. Eine feinere Abstufung sieht exakter aus, erhöht aber nicht die Genauigkeit, die ja, wie oben ausgeführt, von vielen anderen nicht berücksichtigten Faktoren abhängt

Beispiel:

Gesucht wird der 900-Watt Kreisradius b um einen a = 10 cm hohen Schattenwerfer.

Der Winkel α folgt aus $P_{\max} = 900 \text{ W/m}^2 = 1000 \times \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = 0,9 = 64,158^\circ$

Der zum Sinuswert passende Winkel kann mit dem Taschenrechner durch die Taste „asin“ ermittelt werden.

Die Beziehung $a/b = \tan \alpha$ wird nach b aufgelöst $\rightarrow b = a / \tan \alpha$

Der Tangens von 64,158° ist 2,065

Die Schattenlänge beträgt im konkreten Fall

$$b = 10 \text{ cm} / \tan 64,158^\circ = 10 \text{ cm} / 2,065 = 4,84 \text{ cm}$$

Die folgende Tabelle gibt alle geforderten Werte wider.

Schattenlänge b bei einer Höhe des Schattenstabes von a = 10 cm

($b = 10 \text{ cm} / \tan \alpha$)

W/m ²	α	$\tan \alpha = a/b$	b (cm)	W/m ²	α	$\tan \alpha = a/b$	b (cm)
1000	90,00	-	0	500	30,00	0,58	17,32
950	71,81	3,04	3,29	450	26,74	0,50	19,85
900	64,16	2,06	4,84	400	23,58	0,44	22,91
850	58,21	1,61	6,20	350	20,49	0,37	26,76
800	53,13	1,33	7,50	300	17,46	0,31	31,79
750	48,59	1,13	8,82	250	14,48	0,26	38,72
700	44,43	0,98	10,20	200	11,54	0,20	48,98
650	40,54	0,86	11,70	150	8,63	0,15	65,89
600	36,87	0,75	13,33	100	5,74	0,10	99,49
550	33,37	0,66	15,18	50	2,87	0,05	199,47

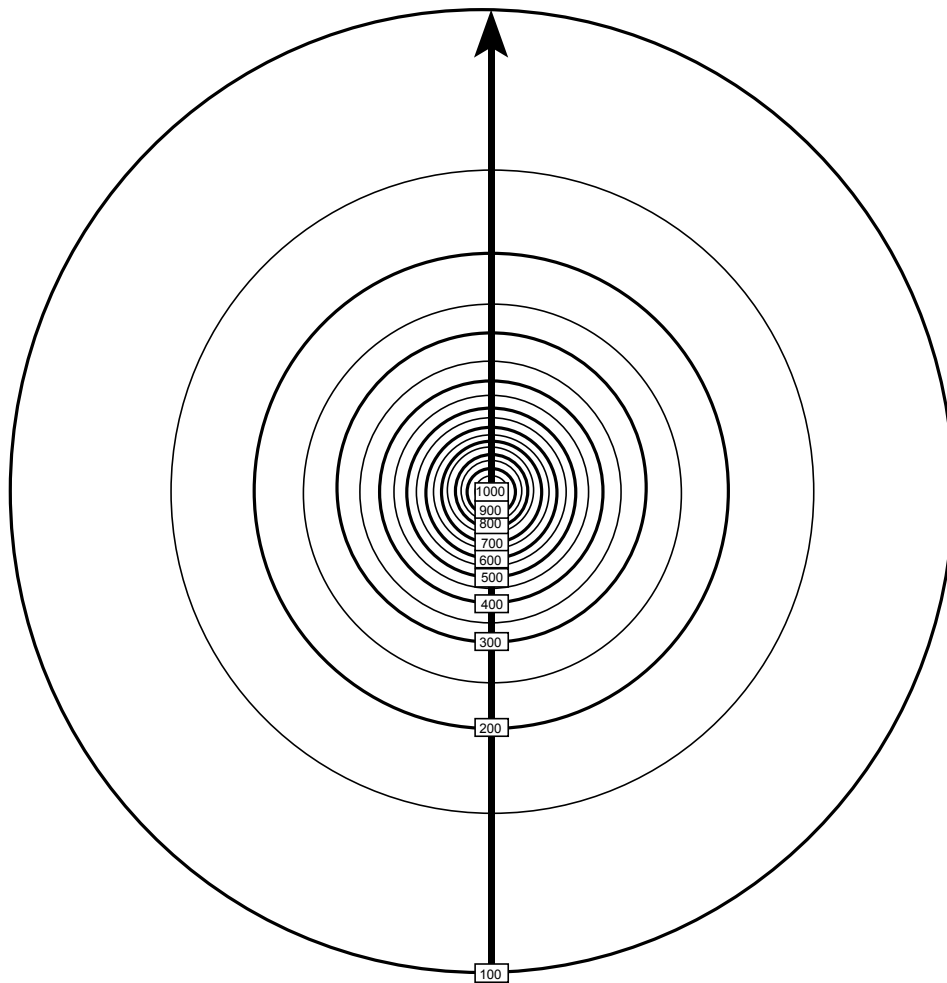
Abschätzen der Tagessummen

Wenn Sie die Strahlungswerte im z.B. im 15-Minuten Abstand aufnehmen, können Sie die Strahlungsleistung als Balkendiagramm darstellen. Liegt der Mittelwert zwischen den Beobachtungen z.B. bei 600 W/m², dann ist diese Zahl mit 900 s zu multiplizieren (15 x 60 s). Im konkreten Fall sind 540000 Joule vom Himmel gefallen. Da 1 kWh 3600000 Joule entspricht, sind das 0,15 kWh.

Natürlich kann das Schattenende auch über einen Zeitraum hinweg mit dem Stift nachgezeichnet werden.

Für den Messtisch haben wir eine 19 mm starke sog. Siebdruckplatte genommen. Damit die Platte wirklich horizontal liegt, sollte ihr eine Libelle (Baumarkt) aufgesetzt werden. Den Stab haben wir aus einer 10 mm Gewindestange geschnitten. Er wurde mit Muttern (Kontermuttern nicht vergessen) und breiten Unterlegscheiben vertikal in die Plattenmitte gesetzt.

Ingo Mennerich, August 2000



Maximal mögliche Strahlungsleistung der Sonne in Watt pro Quadratmeter

Höhe des Schattenwerfers = 1 cm

Bitte mit Kopierer so vergrößern, dass der 100-Watt-Ring einen Radius von 9,949 cm hat – oder besser – nach obigen Angaben selbst berechnen und zeichnen!